資料４　成果報告会における公開授業生徒発表大会レポート

(1)　「X線の干渉」　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　２年５組　　七澤　広

①5つのピンホールによる回折　　　1　 2　 3　 4　 5

原子位置　　　・　・　・　・　・

-2d　-d　*0　d　2d

$t/T-(R+x^2/2)/\lambda=\alpha$，$dx/2R\lambda=\beta$と置くと

$w=w1+w2+{*}w3+w4+w5$

$=\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-2\beta)$

$=2\sin\alpha\cos2\beta+2\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha$

$=(1+2\cos\beta+2\cos2\beta)\sin\alpha$

$|w|^2=(1+2\cos\beta+2\cos2\beta)^2\ \langle\sin^2\alpha\rangle_t=(1+2\cos\beta+2\cos2\beta)^2\ \cdot1/2$

+1　　+1

最大回折強度：$\beta=2\pi dx/R\lambda$，$dx/R\lambda=n$　$(n=0,1,2\cdots)$のとき

$(1+2+2)^2/2=12.5$。

3つのピンホールによる回折スポットと位置は同様。

②十字形に並ぶ6原子による回折(1)

$wi=\sin2\pi(t/T-xi/\lambda)$　光路の基準点2(0,0,0)

原子iの位置：1(d,0,0)，2(0,0,0)，3(-d,0,0)，4(0,d,0)，5(0,-d,0)

```
   4
  ・2
3・・・1
  ・
  5
```

$x1=\sqrt{[R^2+(x-d)^2+y^2]}=R\sqrt{(1+[(x-d)/R]^2+[y/R]^2)}$

$R+(x-d)^2/2R+y^2/2R=R+x^2/2R-xd/R+y^2/2R$

${*}x2=\sqrt{[R^2+x^2+y^2]}=R\sqrt{(1+[x/R]^2+[y/R]^2)}$　$R+x^2/2R+y^2/2R$

$x3=\sqrt{[R^2+(x+d)^2+y^2]}=R\sqrt{(1+[(x+d)/R]^2+[y/R]^2)}$

$R+(x+d)^2/2R+y^2/2R=R+x^2/2R+xd/R+y^2/2R$

$x4=\sqrt{[R^2+x^2+(y-d)^2]}=R\sqrt{(1+[x/R]^2+[(y-d)/R]^2)}$

$R+x^2/2R+(y-d)^2/2R=R+x^2/2R+y^2/2R-yd/R$

$x5=\sqrt{[R^2+x^2+(y+d)^2]}=R\sqrt{(1+[x/R]^2+[(y+d)/R]^2)}$

$R+x^2/2R+(y+d)^2/2R=R+x^2/2R+y^2/2R+yd/R$

$(x1-x2)$　$-dx/R$，$(x3-x2)$　$+dx/R$，$t/T-x2$　$t/T-(R+x^2/2R+y^2/2R)/\lambda$，

$(x4-x2)$　$-dy/R$，$(x5-x2)$　$+dy/R$　から

$2\pi(t/T-x2/\lambda)$　$2\pi[t/T-(R+x^2/2R+y^2/2R)/\lambda]=\alpha$，

$2\pi(x3-x2)/\lambda$　$2\pi(dx/R\lambda)=\beta$，$2\pi(x5-x2)/\lambda$　$2\pi(dy/R\lambda)=\gamma$

と置くと$w1=\sin2\pi(t/T-x1/\lambda)=\sin2\pi(t/T-[R+x^2/2R+y^2/2R-xd/R)]/\lambda)$

$=\sin(\alpha-\beta)$　同様にw2以下を求めると

$w=w1+{*}w2+w3+w4+w5$

$=\sin(\alpha-\beta)+\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)$

$=2\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\gamma$

$=(1+2\cos\beta+2\cos\gamma)\sin\alpha$

$|w|^2=(1+2\cos\beta+2\cos\gamma)^2\ \langle\sin^2\alpha\rangle_t$

$=(1+2\cos\beta+2\cos\gamma)^2\ \cdot1/2$

最大回折強度：$\beta=2\pi dx/R\lambda$，$dx/R\lambda=n$　$(n=0,1,2\cdots)$

$x=(\beta R/d)n\lambda$　で最大

$\gamma=2\pi dy/R\lambda$，$dy/R\lambda=m$　$(m=0,1,2\cdots)$

$y=(\gamma R/d')m\lambda$　で最大

(n,m)＝(0,0)，(1,0)，(2,0)･･･(n,0)，･･･，

(0,1)，(0,2)，(0,3)･･･(0,m)，･･･，

(1,1)，(2,1)，(1,2)･･･(i,j)･･･

のとき$(1+2+2)^2/2=12.5$。

回折像は2次元のスポットになる。

```
y=(γR/d)λ単位
2  ・  ・  ・  ・
1  ・  ・  ・  ・
0  ・  ・  ・  ・
    0   1   2   3  x=(βR/d)λ単位
```

③十字形を左右に増やした場合(2)

```
 ・  ・  ・
・・・・・・・
 ・  ・  ・
```

$w=\sin(\alpha+2\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha-2\beta+\gamma)$

$+\sin(\alpha+3\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+\beta)$
$+\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-2\beta)+\sin(\alpha-3\beta)$
$+\sin(\alpha+2\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\alpha+2\beta-\gamma)$
$=\sin\alpha+2\sin\alpha\cos3\beta+2\sin\alpha\cos2\beta+2\sin\alpha\cos\beta$
$+2\sin(\alpha+2\beta)\cos\gamma+2\sin\alpha\cos\gamma+2\sin(\alpha-2\beta)\cos\gamma$
$=\sin\alpha+2\sin\alpha\cos3\beta+2\sin\alpha\cos2\beta+2\sin\alpha\cos\beta$
$+4\sin\alpha\cos2\beta\cos\gamma+2\sin\alpha\cos\gamma$
$=\sin\alpha(1+2\cos\beta+2\cos2\beta+2\cos3\beta+4\cos2\beta\cos\gamma+2\cos\gamma)$
+1　　+1　　+1　　+1・+1　　+1
十字形が1つのときと同じ回折像で，
強度$|w^2|=(1+2+2+2+4+2)^2/2=84.5$となり，約7倍になる。

④長方形に並ぶ6原子による回折
$w_i=\sin2\pi(t/T-x_i/\lambda)$　光路の基準点0(0,0,0)
原子iの位置：1(d,0,0)，2(-d,0,0)，3(-d,d",0)，4(d,d",0)，5(-d,-d",0)，6(d,-d",0)
R>>x,y>>d,d" から $R>>x^2/R,y^2/R>>dx/R,d''y/R$，$d''=\sqrt{2}d$
$*x0=\sqrt{[R^2+x^2+y^2]}=R\sqrt{(1+[x/R]^2+[y/R]^2)}$　$R+x^2/2R+y^2/2R$

3・　　・4
2・　*0　・1
5・　　・6

$x1=\sqrt{[R^2+(x-d)^2+y^2]}=R\sqrt{(1+[(x-d)/R]^2+[y/R]^2)}$
$R+(x-d)^2/2R+y^2/2R=R+x^2/2R-xd/R+y^2/2R$
$x2=\sqrt{[R^2+(x+d)^2+y^2]}=R\sqrt{(1+[(x+d)/R]^2+[y/R]^2)}$
$R+(x+d)^2/2R+y^2/2R=R+x^2/2R+xd/R+y^2/2R$
$x3=\sqrt{[R^2+(x-d)^2+(y-d'')^2]}=R\sqrt{(1+[(x-d)/R]^2+[(y-d'')/R]^2)}$
$=R+x^2/2R-dx/R+d^2/2R+y^2/2R-d''y/R+d''^2/2R$
$R+x^2/2R-dx/R+y^2/2R-d''y/R$
$x4=\sqrt{[R^2+(x+d)^2+(y-d'')^2]}=R\sqrt{(1+[(x+d)/R]^2+[(y-d'')/R]^2)}$
$=R+x^2/2R+dx/R+d^2/2R+y^2/2R-d''y/R+d''^2/2R$
$R+x^2/2R+dx/R+y^2/2R-d''y/R$
$x5=\sqrt{[R^2+(x-d)^2+(y+d'')^2]}=R\sqrt{(1+[(x-d)/R]^2+[(y+d'')/R]^2)}$
$=R+x^2/2R-dx/R+d^2/2R+y^2/2R+d''y/R+d''^2/2R$
$R+x^2/2R-dx/R+y^2/2R+d''y/R$
$x6=\sqrt{[R^2+(x+d)^2+(y+d'')^2]}=R\sqrt{(1+[(x+d)/R]^2+[(y+d'')/R]^2)}$
$=R+x^2/2R+dx/R+d^2/2R+y^2/2R+d''y/R+d''^2/2R$
$R+x^2/2R+dx/R+y^2/2R+d''y/R$

$x1+x0=2R+x^2/R-xd/R+y^2/R$　$2R+x^2/R+y^2/R=xi+x0$　(i=1,2,3,4,5,6)
$2\pi[t/T-(x1+x0)/\lambda]$　$2\pi[t/T-(2R+x^2/R+y^2/R)/\lambda]=\alpha$
$x1-x0=-xd/R$，$2\pi(-xd/R)/\lambda=-\beta$，
$2\pi(d''y/R)/\lambda=2\pi(\sqrt{2}dy/R)/\lambda=\gamma$ と置くと，
$x2-x0=+xd/R$,　$2\pi(x2-x0)/\lambda=+\beta$
$x3-x0=-dx/R-d''y/R$　$2\pi(x3-x0)/\lambda=-\beta-\gamma$
$x4-x0=+dx/R-d''y/R$　$2\pi(x4-x0)/\lambda=+\beta-\gamma$
$x5-x0=-dx/R+d''y/R$　$2\pi(x5-x0)/\lambda=-\beta+\gamma$
$x6-x0=+dx/R+d''y/R$　$2\pi(x6-x0)/\lambda=+\beta+\gamma$

$w1=\sin2\pi(t/T-x1/\lambda)=\sin2\pi(t/T-[R+x^2/2R+y^2/2R-xd/R)]/\lambda)$
$=\sin(\alpha-\beta)$　同様にw2以下を求めると
$w=w1+w2+w3+w4+w5+w6$
$[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta-\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$
$+\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$
$=2\sin\alpha\cos\beta+2\sin(\alpha-\beta)\cos\gamma+2\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma]$
$=2\sin\alpha\cos\beta+4\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta$
$=2\sin\alpha\cos\beta(1+2\cos\gamma)$
$|w|^2=4\sin^2\alpha(\cos\beta+2\cos\beta\cos\gamma)^2$
$=4\cdot(1/2)(\cos\beta+2\cos\beta\cos\gamma)^2$
+1　　+1・+1　　$\beta=0,2\pi,4\pi\cdots$　$\gamma=0,2\pi,4\pi\cdots$
-1　　-1・+1　　$\beta=\pi,3\pi,5\pi\cdots$　$\gamma=0,2\pi,4\pi\cdots$
のとき強度$4(1+2)^2/2=18$。

$y=(\gamma R/\sqrt{2}d)\lambda$単位
4　・・・・・・・・
3
2　・・・・・・・・
1
0　・・・・・・・・

0　2　4　x=(βR/d)λ単位

⑤正六角形に並ぶ7原子による回折

$w_i = \sin 2\pi (t/T - x_i/\lambda)$,　　光路の基準点１(0,0,0)

原子iの位置：d単位で 1(0,0,0), 2(1,0,0), 3(-1,0,0), 4(1/2,√3/2,0),
5(-1/2,√3/2,0), 6(-1/2,-√3/2,0) 7(1/2,-√3/2,0)

```
    2
  ・
7・  1・4
6・     ・5
  ・
    3
```

* $x_1 = \sqrt{[R^2 + x^2 + y^2]} = R\sqrt{(1+[x/R]^2+[y/R]^2)}$　$R + x^2/2R + y^2/2R$

$x_2 = \sqrt{[R^2 + (x-d)^2 + y^2]} = R\sqrt{(1+[(x-d)/R]^2+[y/R]^2)}$

$R + (x-d)^2/2R + y^2/2R = R + x^2/2R - xd/R + y^2/2R$

$x_3 = \sqrt{[R^2 + (x+d)^2 + y^2]} = R\sqrt{(1+[(x+d)/R]^2+[y/R]^2)}$

$R + (x+d)^2/2R + y^2/2R = R + x^2/2R + xd/R + y^2/2R$

$x_4 = \sqrt{[R^2 + (x-d/2)^2 + (y-d\sqrt{3}/2)^2]} = R\sqrt{(1+[(x-d/2)/R]^2+[(y-d\sqrt{3}/2)/R]^2)}$

$= R + x^2/2R - dx/2R + d^2/8R + y^2/2R - \sqrt{3}dy/2R + 3d^2/8R$

$R + x^2/2R - dx/2R + y^2/2R - \sqrt{3}dy/2R$

$x_5 = \sqrt{[R^2 + (x-d/2)^2 + (y+d\sqrt{3}/2)^2]} = R\sqrt{(1+[(x-d/2)/R]^2+[(y+d\sqrt{3}/2)/R]^2)}$

$= R + x^2/2R - dx/2R + d^2/8R + y^2/2R + \sqrt{3}dy/2R + 3d^2/8R$

$R + x^2/2R - dx/2R + y^2/2R + \sqrt{3}Ry^2/2R$

$x_6 = \sqrt{[R^2 + (x+d/2)^2 + (y-d\sqrt{3}/2)^2]} = R\sqrt{(1+[(x+d/2)/R]^2+[(y-d\sqrt{3}/2)/R]^2)}$

$= R + x^2/2R + dx/2R + d^2/8R + y^2/2R - \sqrt{3}dy/2R + 3d^2/8R$

$R + x^2/2R + dx/2R + y^2/2R - \sqrt{3}Ry^2/2R$

$x_7 = \sqrt{[R^2 + (x+d/2)^2 + (y+d\sqrt{3}/2)^2]} = R\sqrt{(1+[(x+d/2)/R]^2+[(y+d\sqrt{3}/2)/R]^2)}$

$= R + x^2/2R + dx/2R + d^2/8R + y^2/2R + \sqrt{3}dy/2R + 3d^2/8R$

$R + x^2/2R + dx/2R + y^2/2R + \sqrt{3}Ry^2/2R$

$2\pi(t/T - x_1/\lambda)$　$2\pi[t/T - (R + x^2/2R + y^2/2R)/\lambda] = \alpha$

$2\pi(dx/R)/\lambda = 2\beta$, $2\pi(\sqrt{3}dy/2R)/\lambda = \gamma$ と置くと

$(x_2 - x_1)$　$-dx/R = -2\beta$,

$(x_3 - x_1)$　$+dx/R = +2\beta$,

$(x_4 - x_1)$　$-dx/2R - \sqrt{3}dy/2R = -\beta - \gamma$,　$(x_5 - x_1)$　$-dx/2R + \sqrt{3}dy/2R = -\beta + \gamma$

$(x_6 - x_1)$　$+dx/2R - \sqrt{3}dy/2R = +\beta - \gamma$,　$(x_7 - x_1)$　$+dx/2R + \sqrt{3}dy/2R = +\beta + \gamma$

$w_2 = \sin 2\pi(t/T - x_2/\lambda) = \sin 2\pi[t/T - (R + x^2/2R + y^2/2R - xd/R)/\lambda]$

$= \sin(\alpha - 2\beta)$　以下同様に

$w = {}^{*}w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7$

$= \sin\alpha + \sin(\alpha - 2\beta) + \sin(\alpha + 2\beta)$

$+ \sin(\alpha - \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma)$

$+ \sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)$

$= \sin\alpha + 2\sin\alpha\cos 2\beta + 2\sin(\alpha - \beta)\cos\gamma + 2\sin(\alpha + \beta)\cos\gamma$

$= (1 + 2\cos 2\beta + 2\cos\gamma \cdot 2\cos\beta)\sin\alpha$

$|w|^2 = (1 + 2\cos 2\beta + 4\cos\gamma\cos\beta)^2 \langle \sin^2\alpha \rangle_t$

$= (1 + 2\cos 2\beta + 4\cos\gamma\cos\beta)^2 \cdot 1/2$

最大回折強度：$\beta = \pi dx/R\lambda = n$　$(n = 0,1,2\cdots)$

$\gamma = \pi\sqrt{3}dy/R\lambda = m$　$(m = 0,1,2\cdots)$

のとき$(1+2+4)^2/2 = 24.5$。

$1 + 2\cos 2\beta + 4\cos\beta\cos\gamma$

① +1　+1・+1　β＝0 and γ＝0,2,4・・・
2　γ＝0,2,4・・・
4　γ＝0,2,4・・・
・・・

② +1　-1・-1　β＝1 and γ＝1,3,5・・・
3　γ＝1,3,5・・・
5　γ＝1,3,5・・・
・・・

回折像は①と②の2系列のスポットになる。

```
      y(γR/√3d)λ単位
①    2 ・    ・    ・
②    1    ・    ・    ・
①    0 ・    ・    ・
       0  1 2  3 4  5  x(βR/2d)λ単位
```